A rendre pour le 20 Février 2019

Exercice 1 - Étude de fonction et suites

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = a \text{ et pour tout entier } n,\ u_{n+1} = u_n(2-u_n),$$

où a est un réel tel que $0 < a < 1$.

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynôme) et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2 - 2x$$

On a $2-2x > 0 \iff 1 > x$. Sachant que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\to+\infty} f(x) = -\infty$. D'où le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	$-\infty$	0	1		$-\infty$

2. (a) On montre les propriétés suivantes $\mathscr{P}_n$: $\{0 < u_n < 1\}$.
   — **Initialisation :** $u_0 = a \in]0,1[$ donc la propriété $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   — **Hérédité :** On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vrai pour un certain rang n. On a donc

$$\begin{aligned} & 0 < u_n < 1 \\ \Longrightarrow\ & f(0) < f(u_n) < f(1) \quad \text{(La fonction } f \text{ est croissante sur } [0,1].) \\ \Longrightarrow\ & 0 < u_{n+1} < 1 \end{aligned}$$

   La proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition $(\mathscr{P}_n)$ est héréditaire.
   — **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < 1.}$

   (b) On sait que pour tout entier n, $u_n > 0$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2 - u_n > 1$$

   car $u_n < 1$.

$$\boxed{\text{La suite } u_n \text{ est donc croissante .}}$$

   (c) La suite est croissante et majorée par 1. $\boxed{\text{Elle est donc convergente}}$ et tend vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$. On a nécessairement

$$f(\ell) = \ell \iff 2\ell - \ell^2 = \ell \iff \ell^2 - \ell = 0$$

   Les solutions possibles sont 0 et 1. Or, la suite (u_n) est croissante donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.}$$

3. On considère la suite numérique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = 1 - u_n$$

(a) Pour tout entier n,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 1 - u_{n+1} \\ &= 1 - (2u_n - u_n^2) \\ &= 1 - 2u_n + u_n^2 \\ &= (1-u_n)^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi } \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = v_n^2.}$$

(b) On montre les propriétés suivantes $\mathscr{P}_n : \left\{v_n = (1-a)^{2^n}\right\}$.

— **Initialisation :** $v_0 = 1 - a$ et $(1-a)^{2^0} = 1 - a$ donc la propriété $\mathscr{P}_0$ est vraie.

— **Hérédité :** On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vrai pour un certain rang n. On a donc

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n^2 \\ &= \left((1-a)^{2^n}\right)^2 \\ &= (1-a)^{2^{n+1}} \end{aligned}$$

La proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition $(\mathscr{P}_n)$ est héréditaire.

— **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_n = (1-a)^{2^n}.}$

(c) On a $1 - a \in]0, 1[$. $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} (1-a)^X = 0$. Donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = 0.}$$

Et comme $u_n = 1 - v_n$, on retrouve

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.}$$

4. On considère le temps de vie d'une machine à café. En sortant de l'usine (au temps $t = 0$), la machine à café à une probabilité a d'être cassé ($0 < a < 1$). On notera A_n l'événement "la machine est cassé au temps $t = n$" et $p_n = p(A_n)$. Si la machine est cassé au temps $t = n$ elle reste cassé au temps $t = n + 1$. Si la machine est en état de marche au temps $t = n$, elle a la probabilité p_n d'être cassé au temps $t = n + 1$.

(a) Les évènements A_0 et $\overline{A_0}$ forment un système complet d'évènements. Donc, d'après la formule des probabilités totales.

$$\begin{aligned} p_1 = p(A_1) &= p(A_0)p_{A_0}(A_1) + P(\overline{A_0})P_{\overline{A_0}}(A_1) \\ &= a \times 1 + (1-a)p_0 \\ &= a + (1-a)a \\ &= 2a - a^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On conclut que } p_1 = a(2-a).}$$

(b) Les évènements A_0 et $\overline{A_0}$ forment un système complet d'évènements. Donc, d'après la formule des probabilités totales.

$$\begin{aligned} p_{n+1} = p(A_{n+1}) &= p(A_n)p_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n})P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \\ &= p_n \times 1 + (1-p_n)p_n \\ &= p_n(2-p_n) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ p_{n+1} = p_n(2 - p_n).}$$

(c) La suite (p_n) est la même que la suite u_n de la première partie. On a donc

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} p_n = 1.}$$

Cela signifie que sur le long terme, la machine à café finira par être cassé (ce qui est logique finalement).

Exercice 2 - Étude de fonction et suites

On considère l'application définie sur $]0; +\infty[$, $f : x \longmapsto f(x) = (x + \ln x)\, e^{x-1}$.

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \left]0; +\infty\right[$,

$$\boxed{f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{x-1} + (x + \ln x)\, e^{x-1} = \left(1 + \frac{1}{x} + x + \ln x\right) e^{x-1}}$$

2. On pose g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \ln x + \frac{1}{x}$. La fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$ (somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$) et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$$

On trace le tableau de variation de la fonction g.

x	0		1		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g		$\searrow$	1	$\nearrow$	

La fonction g admet un minimum global en $x = 1$ et $g(1) = \ln(1) + 1 = 1$. Donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln x + \frac{1}{x} > 0.}$$

3. D'après la question précédente $\ln x + \dfrac{1}{x} > 0$ et pour tout $x > 0$, $x + 1 > 0$. Par conséquent

$$\boxed{\forall x \in \left]0; +\infty\right[, \quad x + \ln x + 1 + \tfrac{1}{x} > 0.}$$

On a $f'(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x} + x + \ln x\right) e^{x-1}$. Or pour tout $x > 0$ $e^{x-1} > 0$ et $1 + \dfrac{1}{x} + x + \ln x > 0$.

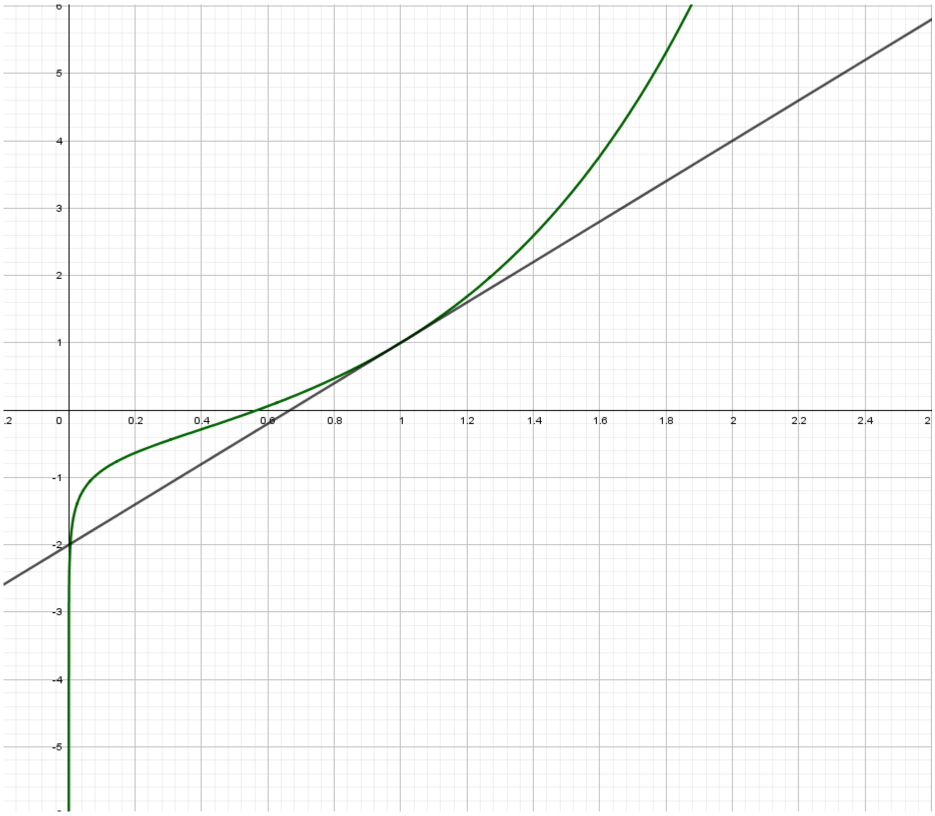
$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc strictement croissante.}}$$

4. On a $\lim\limits_{x \to 0} x + \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} e^{x-1} = e^{-1}$. Ainsi, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$. De plus $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$			$+$		
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$$\boxed{\text{On a } f(1) = (1+\ln(1))e^{1-1} = 1 \text{ et } f'(1) = (1+1+1+\ln(1))e^{1-1} = 3.}$$

5. $\boxed{\text{La courbe } C \text{ admet une asymptote verticale en } x = 0.}$
6. La tangente au point d'abscisse 1 est la droite d'équation $y = 3(x-1)+1 = 3x-2$.



On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

7. On montre par récurrence les propriétés suivantes $\mathscr{P}_n : \{u_n \geq 2\}$.
   — **Initialisation :** $u_0 = 2$ donc la propriété $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   — **Hérédité :** On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vrai pour un certain rang n. On a donc

$$\begin{aligned} & u_n \geq 2 \\ \Longrightarrow \quad & f(u_n) \geq f(2) \quad \text{(La fonction } f \text{ est croissante)} \\ \Longrightarrow \quad & u_{n+1} \geq (2+\ln(2))e \geq 2 \end{aligned}$$

   La proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition $(\mathscr{P}_n)$ est héréditaire.
   — **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 2.}$
8. On montre par récurrence les propriétés suivantes $\mathscr{P}_n : \{u_n \geq e^n\}$.
   — **Initialisation :** $u_0 = 2$ et $e^0 = 1$ donc la propriété $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   — **Hérédité :** On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vrai pour un certain rang n. On a donc

$$u_{n+1} = (u_n + \ln(u_n))e^{u_n - 1}$$

   Or $u_n \geq 2$ donc $e^{u_n-1} \geq e$ et $\ln(u_n) > 0$. On a donc

$$\begin{aligned} & u_{n+1} \geq u_n e^{u_n-1} \\ \Longrightarrow \quad & u_{n+1} \geq e^n e \\ \Longrightarrow \quad & u_{n+1} \geq e^{n+1} \end{aligned}$$

   La proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition $(\mathscr{P}_n)$ est héréditaire.

— **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \geq e^n.}$
On a $\lim_{n \to +\infty} e^n = +\infty$. Par comparaison,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.}$$

9. Écrire un programme en Scilab qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 10^{20}$.

```
n = 0
u = 2
while u < 10^(20) do
    u = (u + log(u))*exp(u-1)
    n = n+1
end
disp(n)
```

Exercice 3 - Étude de fonctions et suites

On considère la fonction $f : x \to e^{-\frac{x^2}{2}}$. On définit la suite (u_n) par

$$u_0 \in [0,1], \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

1. On pose g la fonction définie sur $[0,1]$ par $g(x) = f(x) - x$. La fonction g est dérivable sur $[0,1]$ et $g'(x) = -xe^{-x^2/2} - 1$. Sur $[0,1]$ on a $g'(x) < 0$ donc
   — g est continue sur $[0,1]$.
   — g est strictement décroissante sur $[0,1]$.
   — $g([0,1]) = [e^{-1/2} - 1, 1]$
   Or $0 \in [e^{-1/2} - 1, 1]$ donc, d'après le théorème de la bijection, L'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0,1]$.

$$\boxed{\text{Il existe donc un unique } \alpha \in [0,1] \text{ tel que } f(x) = x.}$$

2. (a) Soit $x \in [0,1]$, c'est à dire

$$\begin{aligned}
& 0 \leq x \leq 1 \\
\Longrightarrow\ & 0 \leq \frac{x^2}{2} \leq \frac{1}{2} \\
\Longrightarrow\ & 0 \geq -\frac{x^2}{2} \geq -\frac{1}{2} \\
\Longrightarrow\ & 1 \geq e^{-\frac{x^2}{2}} \geq e^{-\frac{1}{2}} > 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est stable par } [0,1].}$$

   (b) On montre par récurrence les propriétés suivantes $\mathscr{P}_n : \{u_n \in [0,1]\}$.
   — **Initialisation :** $u_0 \in [0,1]$ donc la propriété $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   — **Hérédité :** On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vrai pour un certain rang n. On a donc $u_n \in [0,1]$ et

$$u_{n+1} = f(u_n) \in [0,1]$$

   La proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition $(\mathscr{P}_n)$ est héréditaire.
   — **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,1].}$

3. (a) f est dérivable sur $[0,1]$ et

$$\forall x \in [0,1], \quad f'(x) = -xe^{-x^2/2} \leq 0$$

Comme $x \in [0,1]$, on a

$$x \leq 1 \iff e^{-x^2/2} \geq e^{-1/2}$$

De plus $-x \geq -1$ donc

$$0 \geq -xe^{-x^2/2} \geq -\frac{1}{e^{1/2}} \iff 0 \geq f'(x) \geq -\frac{1}{\sqrt{e}}$$

On en déduit

$$\boxed{\forall x \in [0,1], \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}.}$$

(b) On sait que
— La fonction f est dérivable sur $[0,1]$
— On a la relation $\forall x \in [0,1], \quad |f'(x)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{e}}$
— $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$ et $\alpha \in [0,1]$.
Donc d'après l'inégalité des accroissements finis

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}|u_n - \alpha|.$$

Comme $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(\alpha) = \alpha$, on a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}|u_n - \alpha|.}$$

(c) On montre par récurrence les propriétés suivantes $\mathscr{P}_n : \left\{ |u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)^n \right\}$.

— **Initialisation :** $\mathscr{P}_0$ s'écrit $|u_0 - \alpha| \leq 1$, or $u_0 \in [0,1]$ et $\alpha \in [0,1]$ donc la distance entre ces deux nombres est inférieure à 1 et donc la propriété $\mathscr{P}_0$ est vraie.

— **Hérédité :** On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vrai pour un certain rang n. On a donc $|u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)^n$.

Et d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \alpha| &\leq \frac{1}{\sqrt{e}}|u_n - \alpha| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{e}} \times \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n \qquad \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

La proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition $(\mathscr{P}_n)$ est héréditaire.

— **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \ |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n.}$

(d) Comme $\dfrac{1}{\sqrt{e}} \in]-1;1[$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n = 0$$

Par le théorème des gendarmes,

$$\boxed{(u_n) \text{ est convergente et } \lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha.}$$